Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) VI Международной инженерно-физической олимпиады НИЯУ МИФИ (профиль "Математика")

VI Международная инженерно-физическая олимпиада НИЯУ МИФИ проводится по заданиям, составленным членами профессорско-преподавательского состава НИЯУ МИФИ, а также специалистами по профилю Олимпиады, в единый для всех субъектов РФ срок: **24 марта 2024 года**. Олимпиада проводится для студентов, обучающихся по образовательным программам бакалавриата, магистратуры и специалитета.

Победители и призеры олимпиады определяются Положением о «VI Международной инженерно-физической олимпиаде НИЯУ МИФИ».

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов **от 0 до 7**. Задания олимпиады представляют собой 7 задач по разделам Высшей математики. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 49.

Задания математических олимпиад являются творческими и допускают несколько вариантов решения. Кроме того, оцениваются частичные продвижения в задачах (например, доказательство вспомогательного утвеждения, разбор важного случая, нахождение примера и т.п.).

Таким образом, проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) *любое* правильное решение оценивается в 7 баллов;

б) *недопустимо* снятие баллов за неаккуратность записи решений;

в) в случае дистанционного участия, *неразборчивые* ввиду плохого качества или неудачной съемки (например, чрезмерная размытость) решения оцениваются в 0 баллов.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведенной ниже таблице.

Баллы	**Критерии**
7	Полностью верное решение.
6	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
1-2	Правильное начало решения/частичное решение, получен неверный ответ
0	Решение отсутствует

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады.

Задача 1. Найти, при каком значении параметра α данный предел конечен

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+...+n^k-\alpha\, n^{k+1}}{n^k}\qquad (k\in\mathbb{N}).$$

Вычислить предел при найденном α.
Ответ. $\alpha=\frac{1}{k+1}$; $\frac{1}{2}$.
Решение. По теореме Штольца имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1^k+2^k+...+n^k+(n+1)^k-\alpha\,(n+1)^{k+1})-(1^k+2^k+...+n^k-\alpha\, n^{k+1})}{(n+1)^k-n^k}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k\,(1-\alpha\, n-\alpha)+\alpha\, n^{k+1}}{n^k\,((1+\frac{1}{n})^k-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^k\,(1-\alpha\, n-\alpha)+\alpha\, n}{(1+\frac{1}{n})^k-1}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{k}{n}+\frac{k\,(k-1)}{2\,n^2}+\tilde{o}(\frac{1}{n^2}))\,(1-\alpha\, n-\alpha)+\alpha\, n}{\frac{k}{n}+\tilde{o}(\frac{1}{n})}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\,(1-\alpha-\alpha\, k)+(k-\alpha\, k-\frac{\alpha\, k\,(k-1)}{2})+\tilde{o}(1)}{k+\tilde{o}(1)}$$

Предел конечен при $1-\alpha-\alpha\, k=0$, то есть $\alpha=\frac{1}{k+1}$, и равен $\frac{1}{2}$.

Задача 2. Найти $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{2-x_n}{2+x_n}}$, где $x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}$ (n - двоек, $n\in\mathbb{N}$).

Ответ. $y=\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$.
Решение.

$$y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-x_n}{2+x_n}}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{tg} y=\sqrt{\frac{2-x_n}{2+x_n}}.$$

Найдем $\operatorname{tg}(2\,y)$:

$$\operatorname{tg}(2\,y)=\frac{2\ \operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg}^2 y}=\frac{2\sqrt{\dfrac{2-x_n}{2+x_n}}}{1-\dfrac{2-x_n}{2+x_n}}=2\sqrt{\frac{2-x_n}{2+x_n}}\cdot\frac{2+x_n}{2\,x_n}=\frac{\sqrt{4-x_n^2}}{x_n}.$$

Заметим, что $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$, тогда

$$\operatorname{tg}(2\,y)=\sqrt{\frac{2-x_{n-1}}{2+x_{n-1}}}.$$

Применим полученную формулу еще $n-2$ раза, тогда:

$$\operatorname{tg}(2^{n-1}\,y)=\sqrt{\frac{2-x_1}{2+x_1}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}},$$

а затем

$$\operatorname{tg}(2^{n}\,y)=\frac{2\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}}{1-\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})\,(2+\sqrt{2})}}{\sqrt{2}}=1,$$

значит $2^n\,y=\operatorname{arctg}1=\dfrac{\pi}{4}, y=\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$.

Задача 3. Рассмотрим оператор φ, переводящий вектор $\vec{a}=(x_1,y_1,0)$ из $\mathbb{R}^3$ в вектор $\vec{b}=(x_2,y_2,0)$ из $\mathbb{R}^3$. Координата x_2 образа равна координате z вектора (x,y,z), полученного векторным произведением прообраза $\vec{a}$ на вектор $\vec{c}=(y_1,x_1,0)$. Координата y_2 образа равна скалярному произведению векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

Найдите $\varphi^{100}(\vec{a})$, где $\vec{a}=(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3},0)$.

Ответ. $\varphi^{100}(\vec{a})=(-2^{3\cdot2^{99}-1},-\sqrt{3}\cdot2^{3\cdot2^{99}-1},0)$.

Решение. По описанию заданного оператора можно получить, что $x_2=x_1^2-y_1^2$, а $y_2=2\,x_1\,y_1$, тогда $\varphi(\vec{a})=(x_1^2-y_1^2,2\,x_1\,y_1,0)$.

Так как между двумерным вектором (в нашем случае трехмерным, но с координатой z равной нулю) и комплексным числом можно рассмотреть взаимно однозначное соответствие, то для вектора $\vec{a}$ возьмем комплексное число $z_1=x_1+i\,y_1$, а для вектора $\varphi(\vec{a})$ возьмем комплексное число $z_2=x_2+i\,y_2=x_1^2-y_1^2+i\,(2\,x_1\,y_1)=(x_1+i\,y_1)^2=z_1^2$. Тогда для того, чтобы найти компоненты вектора $\varphi^{100}(\vec{a})$ возведем комплексное число $z_1=1-\sqrt{3}+i\,(1+\sqrt{3})$ в 2^{100} степень и найдем его действительную и мнимую части.

Рассмотрим

$$z_1=1-\sqrt{3}+i\,(1+\sqrt{3})=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}+i\,(\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3})\right)=$$

$$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}+i\,(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3})\right)=2\sqrt{2}\,e^{i\,\frac{7\pi}{12}}.$$

Тогда

$$z_1^{2^{100}}=(2\sqrt{2})^{2^{100}}\,e^{i\,2^{100}\,\frac{7\pi}{12}}=2^{3\cdot2^{99}}\,e^{i\,2^{98}\,\frac{7\pi}{3}}.$$

Рассмотрим степень экспоненты (без i и π) и выделим целую часть, кратную 2, так как она не повлияет на комплексное число:

$$\frac{7\cdot2^{98}}{3}=\frac{(9-2)\cdot2^{98}}{3}=3\cdot2^{98}-\frac{2^{99}}{3}=3\cdot2^{98}-\frac{3\cdot2^{97}+2^{97}}{3}=$$

$$3\cdot2^{98}-2^{97}-\frac{3\cdot2^{95}+2^{95}}{3}=3\cdot2^{98}-2^{97}-...-2-\frac{2}{3},$$

тогда $e^{i\,2^{98}\,\frac{7\pi}{3}} = \cos\left(2^{98}\,\frac{7\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(2^{98}\,\frac{7\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$z_1^{2^{100}} = -2^{3\cdot 2^{99}-1}\,(1 + i\,\sqrt{3}).$$

Искомый в задаче вектор $\varphi^{100}(\vec{a}) = (-2^{3\cdot 2^{99}-1}, -\sqrt{3}\cdot 2^{3\cdot 2^{99}-1}, 0)$.

Задача 4. Алиса решила сыграть в шахматы с 5 людьми. Алиса хороший игрок, поэтому поставила себе определенное условие: если Алиса проигрывает игру, то играет её заново. Вероятность выиграть в каждой партии одинакова и равна $\dfrac{5}{7}$.

1. Сколько игр в среднем сыграет Алиса?
2. Сколько в среднем сыграет игр Алиса, если в случае проигрыша ей придется сыграть на 3 партии больше (вместо выигравшего соперника будет приходить 3 игрока)?

Ответ. 7;35.
Решение.

1. Пусть количество игр с каждым игроком - случайная величина, распределённая геометрически с параметром $p = \frac{5}{7}$, где p - вероятность выиграть игру. Пояснение: Алиса будет играть с $i-$ым соперником, пока не выиграет, что совпадает с описанием геометрически распределенной случайной величины (количество розыгрышей до первой победы).

   Среднее количество игр - математическое ожидание от суммы случайных величин, обозначим их как ξ_i. Тогда

   $$\mathbb{E}(\xi_1 + \ldots + \xi_5) = \mathbb{E}\xi_1 + \ldots + \mathbb{E}\xi_5 = 5\cdot\mathbb{E}\xi_1 = 5\cdot\frac{1}{p} = 5\cdot\frac{7}{5} = 7.$$

2. В случае пункта 2 мы также можем вместо начальных 5 игр рассмотреть одну, так как они независимы. Пусть в какой-то момент необходимо выиграть l соперников до окончательной победы, тогда мы снова можем рассмотреть их как независимые игры, т.е. можно получить следующую формулу:

   $$m_l = l\cdot m_1,$$

   где m_i - среднее количество игр, в которых необходимо сыграть, чтобы закончить, если сейчас Алисе предстоит сыграть с i соперниками.

   Рассмотрим игру с первым соперником. Среднее количество игр, которое необходимо сыграть до конца, равно:

   $$m_1 = p + q\cdot(1 + m_3).$$

   Решая совместно два уравнения, получим:

   $$m_1 = p + q + q\cdot 3\cdot m_1 \Rightarrow m_1\cdot(1-3q) = 1 \Rightarrow m_1 = \frac{1}{1-3q},$$

   где $q = \dfrac{2}{7}$. Тогда для 5 игр получим $\dfrac{5}{1-3q} = \dfrac{5}{1/7} = 35$.

Задача 5. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} f(x)\, f'''(x) = \left(\dfrac{(f^2(x))'}{x}\right)', \\ \dfrac{f(1)}{1!} = \dfrac{f'(1)}{2!} = \dfrac{f''(1)}{3!} = 1. \end{cases}$$

Ответ. $f(x) = \frac{(2+x^3)^2}{9}$.
Решение. Сведем уравнение к виду:

$$\frac{d}{dx}\left(f\, f'' - \frac{1}{2}\, f'\, f' - \frac{(f^2)'}{x}\right) = 0.$$

Проинтегрируем:

$$f\, f'' - \frac{1}{2}\, f'\, f' - \frac{(f^2)'}{x} = C.$$

Подставим $x = 1$ в уравнение выше, с учетом начальных условий получаем, что $C = 0$, тогда:

$$f\, f'' - \frac{1}{2}\, f'\, f' - \frac{(f^2)'}{x} = 0.$$

Сделаем замену $f = g^2$:

$$2\, g^2\, (g')^2 + 2\, g^3\, g'' - \frac{1}{2} \cdot 2\, g\, g' \cdot 2\, g\, g' - \frac{4\, g^3\, g'}{x} = 0.$$

Сократим, разделим на $2\, g^3$ и домножим на x^2, в результате получим:

$$x^2\, g'' - 2\, x\, g' = 0.$$

Решение данного уравнения имеет вид:

$$g(x) = C_1 + C_2\, x^3.$$

Тогда:

$$f(x) = (C_1 + C_2\, x^3)^2.$$

Найдем значения констант из начальных условий:

$$f(1) = (C_1 + C_2)^2 = 1$$

и

$$f'(1) = 6\, C_2\, (C_1 + C_2) = 2.$$

Отсюда константы $C_1 = \pm\frac{2}{3}, C_2 = \pm\frac{1}{3}$ и тогда решение исходной задачи:

$$f(x) = \frac{(2 + x^3)^2}{9}.$$

Задача 6. Используя поточечную сходимость ряда Фурье, найти сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} J_0(n),$$

где $J_0(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos(x \cos t)\, dt-$ функция Бесселя 0-го порядка.

Ответ. $\frac{1}{8} - \frac{\pi^2}{12}$.

Решение. Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} C_n J_0(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_n}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos(nx \cos t)\, dt.$$

Если интеграл, зависящий от параметра x, сходится равномерно к функции Бесселя $J_0(x)$ на всем множестве $\mathbb{R}$, а также функциональный ряд сходится равномерно на всем множестве $\mathbb{R}$, то суммирование и интегрирование можно произвести в любом порядке.

Докажем сходимость по x для интеграла:

$$|\cos(nx \cos t)| < 1 \ \forall x \Rightarrow$$

по теореме Вейерштрасса исходный интеграл сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Докажем сходимость функционального ряда. Воспользуемся признаком Вейерштрасса (следствие из необходимого признака сходимости по критерию Коши выполняется - $U_n = C_n J_0(nx) \rightrightarrows 0$):

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^2} J_0(nx) \right| \leq \frac{1}{n^2} \ \forall x \Rightarrow$$

исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n J_0(nx)$ сходится равномерно на всем множестве $\mathbb{R}$.

Обе сходимости доказаны, значит, можем менять очередность интегрирования и суммирования:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_n}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos(nx \cos t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(nx \cos t)\, dt.$$

Рассмотрим некоторую четную функцию, разложение которой имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(nx) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(nx \cos t) = f(x \cos t).$$

Если мы сможем найти такую функцию $f(x)$, то, проинтегрировав, получим ответ.

Одним из способов нахождения суммы обратных квадратов является разложение параболы $y = x^2$ в ряд Фурье на участке $x \in (-\pi; \pi)$ и дальнейшая подстановка нужной точки из этого интервала. C_n как раз имеет вид, очень похожий на сумму обратных квадратов. Воспользуемся этим фактом - разложим функцию $y = x^2$ в ряд Фурье на участке $x \in (-\pi; \pi)$:

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Найдем коэффициенты a_0, a_n и b_n:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{2}{\pi}\cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos{(nx)}\, dx = \frac{2}{\pi n}\int\limits_{0}^{+\infty} x^2\, d(\sin{(nx)}) = \frac{2}{\pi n}(x^2 \sin{(nx)}\Big|_0^{\pi} - 2\int\limits_0^{\pi} x \sin{(nx)}\, dx) =$$

$$\frac{4}{\pi n^2}\int\limits_0^{\pi} x\, d(\cos{(nx)}) = \frac{4}{\pi n^2}(x\cos{(nx)}\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi}\cos{(nx)}\, dx) = \frac{4}{n^2}\cdot \cos \pi n = \frac{4}{n^2}(-1)^n.$$

$b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin{(nx)}\, dx = 0$ - интеграл от нечетной функции в симметричных пределах.

В итоге ряд Фурье для x^2 на участке $x \in (-\pi; \pi)$ имеет следующий вид:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n}{n^2}}_{C_n}\cos{(nx)}.$$

Выразим отдельно ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n \cos{(nx)}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos{(nx)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos{(nx)} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = f(x).$$

Ранее мы получили, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n \cos{(nx)} = f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\pi^2}{12} \Rightarrow \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n \cos{(nx\cos t)}}_{f(x\cos t)}.$

Значит, ряд с функцией Бесселя можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} C_n J_0(nx) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos{(nx\cos t)}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x\cos t)\, dt,\ \text{где } f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}J_0(nx) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x\cos t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\frac{(x\cos t)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12})\, dt = \frac{x^2}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t\, dt - \frac{\pi^2}{12} =$$

$$\frac{x^2}{16\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1 + \cos 2t)\, dt - \frac{\pi^2}{12} = \frac{x^2}{8} - \frac{\pi^2}{12} = g(x).$$

В задании требовалось найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} J_0(n)$, что эквивалентно подстановке значения $x = 1$ в $g(x)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} J_0(n) = g(1) = \frac{1}{8} - \frac{\pi^2}{12}.$$

Задача 7. Пусть V - линейное пространство над некоторым полем F и V не есть нуль-пространство. Может ли V состоять из конечного числа элементов? Если может, то привести пример такого пространства, если нет, то доказать.

Решение. Если $F = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то не может, так как при $x \neq \theta$ всегда имеем элементы $x, 2\,x, 3\,x, ...$

Для конечного поля, например, $F = \{0, 1, 2\}$ - поле вычетов по модулю 3, может: $V = \{\theta, x, 2\,x\}$, $x \neq \theta$ - вектор вещественного линейного пространства со сложением: $x + x = 2x \pmod 3, x + 2x = \theta \pmod 3, 2x + 2x = x \pmod 3$.